

第三章 静电能

§ 3.1 真空中点电荷间的相互作用能

§ 3.2 连续电荷分布的静电能

§ 3.3 电荷体系在外电场中的静电能

§ 3.4 电场的能量和能量密度

* § 3.5 非线性介质及电滞损耗

* § 3.6 利用静电能求静电力

静电能的定义

建立一个带电系统的过程中，总伴随着电荷相对运动，需要外力克服电荷间的相互作用而作功。外力作功所消耗的能量将转换为带电系统的能量，该能量定义为带电系统的静电能。显然，静电能应由系统的电荷分布决定。

例如，第一章中已讲到的点电荷在外电场中的电势能就是静电能。这是静电场为保守力场的必然结果。

能量的基本概念

一、引入的目的：

1. 能量是物质的共同属性，是物质运动的普遍量度；
2. 能量守恒定律是最有意义、最有用的发现之一；
3. 便于研究不同形式能量的转换。

二、特点：

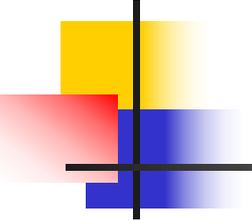
1. 是状态的单值函数，属于整个系统；
2. 能量差才有意义；
3. 用做功来量度能量。

三、描述的方法：

按照其特点，要引入状态参量，规定零点能，然后用做功来计算能量。

§ 3.1 真空中点电荷间的相互作用能

- 设想空间中有多个点电荷，其带电量用 q_i 表示，初始时刻相互间距离为 ∞ ，相互作用的库仑力为 0。随后，外力克服库仑力做功，使它们到达相应的位置 \mathbf{r}_i ，任意两个点电荷间的距离可以由 $r_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}| = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ 给出。
- 这外力做功便转换成该点电荷系的能量，即静电能。
- 所谓点电荷之间的相互作用能，指的就是与点电荷间的相对位置有关的静电能。

- 
- 因此，**状态参量**取为 \mathbf{r}_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, N$)，**初始时刻** $r_{ij} \rightarrow \infty$ ，相互作用的库仑力为零，它们之间的静电相互作用消失，很自然地取这种状态的**相互作用能为零**。
 - 下面，我们用一种**类似于数学归纳法**的办法来计算由 N 个点电荷组成的静电体系的静电能。

两个点电荷时

- 一个点电荷 q 在**外电场** U 中的电势能 $W=qU$
- 设**电势** U 是由另一个点电荷 Q 产生的，于是点电荷 q 具有的电势能可以写作

$$W = qU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}$$

- **同样地**，上式也表示了 Q 在 q 的电场中的电势能；这电势能 W 即**静电能**，属于点电荷 q 与 Q 组成的系统。

- **当两个点电荷**分别为 q_1 和 q_2 时，静电能为：

$$W_{12} = q_2 U_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{12}},$$

同样地，

$$W_{21} = q_1 U_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}} = W_{12},$$

可将**两个点电荷**的静电能记为 W_2 ，**为方便**写成：

$$W_2 = \frac{1}{2} (W_{12} + W_{21}) = \frac{1}{2} (q_2 U_{12} + q_1 U_{21}),$$

- **三个点电荷的静电能**记为 W_3 ，便为：

$$W_3 = \frac{1}{2} (W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32})$$

- 于是可写成:

$$W_3 = \frac{1}{2} (W_{12} + W_{21} + W_{13} + W_{31} + W_{23} + W_{32})$$

$$= \frac{1}{2} (q_2 \underline{U}_{12} + q_1 \underline{U}_{21} + q_3 \underline{U}_{13} + q_1 \underline{U}_{31} + q_3 \underline{U}_{23} + q_2 \underline{U}_{32})$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 q_i U_i, \quad \text{其中 } U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 U_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \frac{q_j}{r_{ji}},$$

- U 代入 W :

$$W_3 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{q_i q_j}{r_{ji}},$$

对N个点电荷系统:

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i U_i, \text{ 其中 } U_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N U_{ji} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{q_j}{r_{ji}},$$

U_i 是除了 q_i 其它点电荷在 q_i 处产生的电势的和。

同理, 将 U 代入 W 得:

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{i=1}^N q_i U_{ji} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \sum_{i=1}^N \frac{q_i q_j}{r_{ji}}.$$

对 $N+1$ 个点电荷系统, 可证 (见书 p68):

$$W_{N+1} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} \frac{q_i q_j}{r_{ji}} \text{ 记为 } \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j,i=1 \\ j \neq i}}^{N+1} \frac{q_i q_j}{r_{ji}}.$$

§ 3.2 连续电荷分布的静电能

首先讨论空间**只有自由电荷**的情形，这意味着电场空间中只允许导体和介电常量恒等于 ε_0 的物体（包括真空）存在。

1. 先考虑体电荷分布的情况，电荷密度设为 $\rho_e(\mathbf{r})$ 。将该**体电荷无限分割**并把每一小部分当作点电荷处理，则**由前节结论可得**：

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_e(\mathbf{r}) U_1(\mathbf{r}) dV, \quad (3.2.1)$$

$U_1(\mathbf{r})$ 表示除 $\rho_e(\mathbf{r})dV$ 外其余所有电荷在 r 处产生的电势。

■ 分析 $U_1(\mathbf{r})$ 和总电势 $U(\mathbf{r})$ 的关系。设 dV 为一球体元，由第1.7节例1.11的结果 (P28)，取 $R_1 = 0$ ， $R_2 = a$ 。可求得电荷密度为 ρ_e 、半径为 a 的均匀带电球体在球内产生的电势为：

$$U' = \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} (3a^2 - r^2),$$

它在球心处取极大值 $U'_m = \rho_e a^2 / 2\epsilon_0$ ，故当 $a \rightarrow 0$ 时有 $U'_m \rightarrow 0$ 即 $U' \rightarrow 0$ 。于是， $U_1(\mathbf{r}) \approx U(\mathbf{r})$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \rho_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV. \quad (3.2.2)$$

2. 对面电荷分布的情形，设面电荷密度为 $\sigma_e(r)$ 。类似，将面电荷无限分割为圆状面电荷元 $\sigma_e(r)dS$ ，它在自身产生的电势不会大于 $\sigma_e a / 2\epsilon_0$ (a 为面元半径，见P26的第1.7节例1.10)，该电势随 $dS \rightarrow 0$ ($a \rightarrow 0$) 而趋于零。

于是， $U_1(r) \approx U(r)$ ，其静电能为：

$$W_e = \frac{1}{2} \iint_S \sigma_e(r) U(r) dS \quad (3.2.3)$$

3. 线电荷分布的情况，不能将静电能写为：

$$-W_e = \frac{1}{2} \int_L \lambda_e(l) U(l) dl \quad \text{或} \quad W_e = \frac{1}{2} \int_L \lambda_e(l) U_1(l) dl$$

因为 $\lambda_e(l) dl$ 在自身所在处产生的电势不仅不趋于零，而且会按 $\ln r$ (r 为离线元 dl 的垂直距离) 趋于无穷。进一步，可证 $U_1(l)$ 也会趋于无穷大。

这在物理上意味着：要把电荷从极端分散状态压缩到一条几何线上，外界需要作无穷大的功。这显然是办不到的。因此，在计算静电能时，无论线径怎样小的带电体均不能当作线电荷处理。

4. 多个带电体组成的系统的静电能。 设有 N 个带电体，体积分别为 V_1, V_2, \dots, V_N 。可将空间的总电势 $U(\mathbf{r})$ 分为两部分(请思考! 为什麼?)

$$U(\mathbf{r}) = U_i(\mathbf{r}) + U^{(i)}(\mathbf{r}),$$

◆ 式中 $U_i(\mathbf{r})$ 表示除第 i 个带电体外其余所有带电体在 r 处产生的电势， $U^{(i)}(\mathbf{r})$ 则表示第 i 个带电体在 r 处产生的电势。按照前述结论，可得：

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) [U_i(\mathbf{r}) + U^{(i)}(\mathbf{r})] dV$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U^{(i)}(\mathbf{r}) dV + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}) dV,$$

可写成:

$$W_e = W_{\text{自}} + W_{\text{互}},$$

其中,

$$W_{\text{自}} = \sum_{i=1}^N W_{\text{自}}^{(i)} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U^{(i)}(\mathbf{r}) dV, \text{ 叫自能}$$

$$W_{\text{互}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} \iiint_{V_i} \rho_e(\mathbf{r}) U_i(\mathbf{r}) dV. \text{ 叫互能}$$

点电荷间、线电荷间可以计算互能。但是,不能计算点电荷、线电荷的自能(为无穷大)。

[例3.1] 求体电荷密度为 ρ_e 、半径为 R 的均匀带电球的静电能（带电体的介电常量设为 ϵ_0 ）。

[解] 以球心为原点，取球坐标 (r, θ, φ) 。根据第一章1.7节例1.11的结果取 $R_1 = 0$, $R_2 = R$, 可得:

于是，积分得：
$$U(r) = \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{r \leq R} \rho_e \cdot \frac{\rho_e}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4\pi \rho_e^2 R^5}{15\epsilon_0}.$$

当 ρ_e 固定时, W_e 将随 $R \rightarrow 0$ 而趋于零, 因电量也趋于零。如果用总电量 $q = 4\pi R^3 \rho_e / 3$ 表示, 上述结果可写成:

$$W_e = \frac{3}{5} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right).$$

这时若固定 q , 当 $R \rightarrow 0$, 则 $W_e \rightarrow \infty$, 即点电荷的自能发散。

5. 对带电导体，静电能公式可进一步简化。导体的特点是**电荷分布在外表面**，**整个导体是等势体**。当求 N 个带电导体组成的体系的静电能时，应用前式可得如下结果：

$$W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \iint_{S_i} \sigma_e U dS = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_i \iint_{S_i} \sigma_e dS = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i U_i,$$

式中 q_i 和 U_i 为第 i 个导体的电量和电势。

[例3.2] 一孤立带电导体球电量为 q ，半径为 R ，求其静电能。

[解] 对孤立导体球有 $U = q/C$ ， $C = 4\pi\epsilon_0 R$ 。应用上式得：

$$W_e = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2C} q^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \right).$$

与例**3.1**的结果比较可知，对电量及半径相同的带电球，其静电自能与电荷分布有关。电荷集中分布于球面比均匀分布于整个球体的自能要小。

■ 如果假设电子的能量 $W = mc^2$ 全部来自静电自能 W_e ，并取 $W_e \approx e^2 / (4\pi\epsilon_0 r_e)$ ，则可求得电子的半径：

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 mc^2} \approx 2.8 \times 10^{-15} \text{ m}$$

r_e 称为电子的经典半径。当然，电子的实际半径比 r_e 要小得多，因此不能作以上假设。

[例3.3] 求平行板电容器的静电能公式。

[解] 如上页图所示，极板间的均匀各向同性电介质的介电常量为 ϵ ，极板面积为 S ，两极板间的间距为 d 。

接通电源后，极板带电分别为 Q_1 和 Q_2 ，且 $Q_2 = -Q_1 = Q$ ；两极板电势分别为 U_1 和 U_2 ，电势差为 $U = U_2 - U_1$ 。

■ **分析电容器充电过程**，电源对电容器做功，使电源能量转化为电容器的静电能。在 q 由0增至 Q 的过程中，电源做功为：

$$A' = \int_0^Q u dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2C} Q^2.$$

则

$$W_e = A' = \frac{1}{2C} Q^2 = \frac{1}{2} Q U,$$

或写成：

$$W_e = \frac{1}{2} Q (U_2 - U_1) = \frac{1}{2} (Q_1 U_1 + Q_2 U_2).$$

这与前面的普适公式的结果一致。

***6.**简单介绍**空间存在电介质**的情形，我们限于**线性无损耗介质**。对于这种情形，随着自由电荷的搬运和电场的建立，介质将会产生极化并出现极化电荷。

一种简单而自然的办法是把极化电荷和自由电荷同等看待，将看成是**总电荷密度** $\rho_e(\mathbf{r})$ ，即自由电荷密度 $\rho_{e0}(\mathbf{r})$ 和极化电荷密度 $\rho'_e(\mathbf{r})$ 之和，然后按前式定义系统的能量，即：

$$W_{e0} = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \rho_{e0}(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V'} \rho'_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV$$

■式中 V_0 和 V' 分别表示自由电荷和极化电荷所在的空间区域。我们将上面定义的能量记为 W_{e0} ，并把它称作系统的**“宏观静电能”**，它可以理解为在建立宏观电荷分布 $\rho_{e0}(\mathbf{r})$ 和 $\rho'_e(\mathbf{r})$ 过程中系统所贮存的静电能。

*■从另一个角度来分析，系统的能量 W_e 应等于在建立该指定状态过程中外界对系统所作的功 A' ，即：

$$W_e = A'.$$

W_{e0} 是否等于 W_e 呢？ 否

理由在于，在介质中建立电场时，外界不仅要克服宏观电荷（包括自由电荷和极化电荷）之间的静电力做功，而且要克服分子内部（对位移极化情形）或分子之间（对取向极化情形）的相互作用做功。第一部分功转化为系统的宏观静电能 W_{e0} ；第二部分功称为“极化功”，它使介质极化。

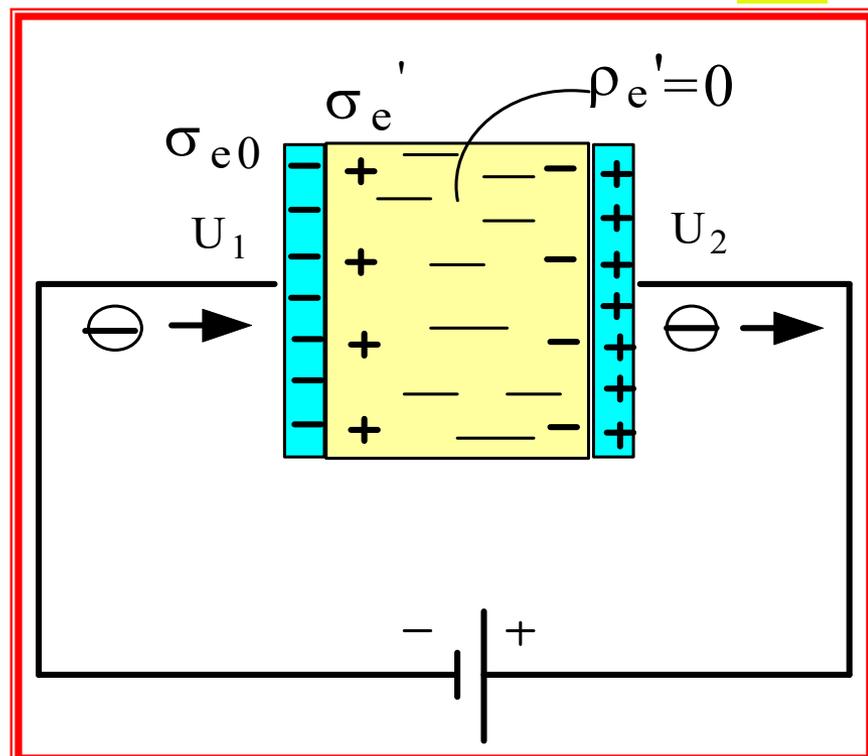
对线性无损耗介质，通过极化功转换到介质的能量称为极化能，记为 $W_{极}$ 。所以： $W_e = W_{e0} + W_{极}$ 。

***[例如]** 填充了均匀介质的平行板电容器（见右下图），极板自由面电荷 σ_{e0} 和介质极化面电荷 σ_e' 对宏观静电能 W_{e0} 都有贡献；而介质体内 $\rho_e' = 0$ ，虽然对 W_{e0} 无贡献，但介质内部那些因极化发生变形或改变排列状态的原子、分子也贮存了一部分能量，并造成 σ_e' ，它们相当于极化能 $W_{极}$ 。

正如前页所述，可定义系统的静电能为：

$$W_e = W_{e0} + W_{极}.$$

在这种定义下，外界做功正好等于系统静电能的变化。



电容器充电时电源做功

*■例3.3启发我们，电源做功转换成系统的静电能可用自由电荷与总电势来表达。可以一般地证明（参见本书下册第二章P64）为：

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_{V_0} \rho_{e0}(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV.$$

物理解释：上式表示，外界在移动自由电荷过程中克服静电力做功，即对电场做功，转化为系统的静电能。
注意！ $U(\mathbf{r})$ 为总电势，自由电荷和极化电荷对它都有贡献。

进一步可推出极化能的一般表达式：

$$W_{\text{极}} = W_e - W_{e0} = -\frac{1}{2} \iiint_{V'} \rho'_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV.$$

■ 式中右边的负号可理解为系统（即电场）对极化电荷做功，其静电能减少。

§ 3.3 电荷体系在外电场中的静电能

- 当**已知外场** U 时，**点电荷** q 在 U 中的电势能可以**直接计算**： $W_e = qU$.

W_e 是 q 在外场 U 中的静电能，**属于相互作用能**。

- 当电荷体系为 **N 个点电荷** q_1, q_2, \dots, q_N 构成的点电荷系统时，它在外电场 U 中的静电能为：

$$W_e = \sum_{i=1}^N q_i U(\mathbf{r}_i),$$

- 电荷密度为 $\rho_e(\mathbf{r})$ 、体积为 V 的**带电体**，在外电场 U 中的静电能应为：

$$W_e = \iiint_V \rho_e(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV.$$

[例3.4] 求电偶极子在外电场中的静电能公式。

[解] 设电偶极子的电偶极矩为 $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ ，则由上式可算得它在外电场 E 中的静电能为（参看例 2.2，计算电偶极子在外电场 E 中受力和力矩）：

$$W_e = -qU_- + qU_+ = q(U_+ - U_-) = q\mathbf{l} \cdot \nabla U,$$

即

$$W_e = \mathbf{p} \cdot \nabla U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$$

这也是电偶极子 \mathbf{p} 在外场 E 中的电势能。

§ 3.4 电场的能量和能量密度

■ 静电能贮存在哪里？

前面导出的静电能公式都与电荷相联系。这给人一种印象，似乎静电能只贮存在电荷上；而电荷周围的空间——存在电场，其静电能为零！这是早期“**超距作用**”的观点。

■ 其后人们发现能量应当**贮存在**电场中，电相互作用是**通过**电场传递，同时应**传递**能量，这就是“**近距作用**”的观点。直到**电磁波**（**电磁场在空间的传播**）**传递能量被证实**后，才被广泛采纳。

为与近距作用观点一致，下面我们设法将有关静电能的公式用电场强度表示出来。

先从平行板电容器的静电能公式入手：

前面已得：

$$W_e = \frac{1}{2}QU,$$

设电容器极板间填满均匀线性各向同性介质，则有 $Q = \sigma_{e0}S = DS$ 和 $U = Ed$ ，从而上述静电能公式可改用电场强度表示：

$$W_e = \frac{1}{2}DSEd = \frac{1}{2}DEV, \quad (3.4.1)$$

式中 $V = Sd$ 为两极板间的体积，即电场空间的体积。定义单位体积的静电能为**电能密度**，则有：

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2}DE \quad (3.4.2)$$

写成矢量式如下，对**线性无损耗介质**都适用：

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (3.4.3)$$

式(3.4.3)表明，原认为局限于极板表面电荷之中的**静电能**，**实际上**是以电能密度**贮存于电场之中**。当空间电场不均匀时，总静电能应为：

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV \quad (3.4.4)$$

这样定义的静电能密度和静电能计入了介质的极化能，它**要求介质是线性无损耗的**。

[例3.5] 从电场的能量公式 (3.4.4) 出发, 重新计算孤立带电导体球 (电量为 q , 半径为 R) 的静电能。

[解] 由高斯定理可求得该导体球的电场强度大小为:

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (r \geq R); \quad E = 0, \quad (r < R)$$

于是:

$$w_e = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}, \quad (r \geq R)$$

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}$$

上述结果与例3.2所得结果一致。这说明, 在静电场范围内, 式 (3.2.3) 和式 (3.4.4) 完全等效。

最后, 由式 (3.4.4) 进一步导出宏观静电能 W_{e0} 和介质极化能 $W_{极}$ 表达式。将 $D = \epsilon_0 E + P$ 代入式 (3.4.4) 得:

$$W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{2} \iiint_V (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{E} dV = W_{e0} + W_{极} \quad (3.4.5)$$

式中:

$$W_{e0} = \frac{1}{2} \iiint_V \epsilon_0 E^2 dV, \quad (3.4.6)$$

$$W_{极} = \frac{1}{2} \iiint_V \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} dV \quad (3.4.7)$$

在静电学范围内, 介质中 $\epsilon_0 E^2 / 2$ 为宏观静电能密度,

$\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}$ 为极化能密度, 二者之和等于静电能密度:

$$w_e = \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} / 2$$

* § 3.5 非线性介质及电滞损耗

前面我们一再强调，所导出的静电能公式仅适用于线性无损耗介质。下面自然要问：**对非线性有损耗介质又该作何处理呢？**

仍限于平行板电容器填满均匀各向同性介质的情况。在例3.3中，我们曾对电容器**充电过程**中电源所作的元功作过分析，结果为： $dA' = u dq$ ， (3.5.1)

由极板内部 $\mathbf{E}=0$ 和极板内、外侧电场强度切向分量连续的条件，电场强度切向分量为零，可推断**只有垂直于极板的分量**。因此，如下关系式成立：

$$u = El, \quad q = \sigma_{e0} S = D_n S$$

代入式 (3.5.1) 得:

$$dA' = (E dD_n) Sl = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}V. \quad (3.5.2)$$

于是对单位体积的电介质, 电源所作的元功为:

$$da' = \frac{dA'}{V} = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{D}. \quad (3.5.3)$$

由 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, 可将上式改写为:

$$da' = d \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \right) + \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}, \quad (3.5.4)$$

物理意义是: 电源所作的功一部分用来增加宏观静电能密度, 另一部分为对介质所作的极化元功。

要分析极化功的具体形式及其后果，必须考虑介质的极化规律，即 \mathbf{P} 和 \mathbf{E} 的函数关系。

* ■ 对线性无损耗介质，可将极化规律写成如下一般形式：

$$P_i = \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} \epsilon_0 E_j, \quad \chi_{ij} = \chi_{ji} \quad (3.5.5)$$

特别对各向同性介质有：

$$\chi_{11} = \chi_{22} = \chi_{33} = \chi_e, \quad \chi_{12} = \chi_{13} = \chi_{23} = 0.$$

由式 (3.5.5) 可证：

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} \epsilon_0 E_i dE_j = \sum_{j=1}^3 (dE_j \sum_{i=1}^3 \chi_{ji} \epsilon_0 E_i) = \sum_{j=1}^3 P_j dE_j = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{E}$$

于是有 $d(\mathbf{P} \cdot \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot d\mathbf{E} = 2\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P}$,

或

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{P} = d\left(\frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot \mathbf{E}\right). \quad (3.5.6)$$

上式表明，极化功全部转换为介质的极化能。

将式 (3.5.6) 代入式 (3.5.4)，得：

$$da' = d\left(\frac{\varepsilon_0}{2} E^2\right) + \frac{1}{2} d(\mathbf{E} \cdot \mathbf{P})$$

推得如下关系式：

$$da' = dw_e, \quad (3.5.7)$$

即电源做功全部转化为电容器的静电能。

■ **对非线性有损耗介质**，式 (3.5.5) 与 (3.5.6) 不再成立，显然不会得到上述简单结果。当介质为非线性有损耗时，极化能密度的表达式将会发生变化，这时一般不再把宏观静电能和极化能合在一起考虑。

当**存在介质损耗**时，极化功中只有**一部分**转化为极化能，**另一部分**则转化为热量，**重点转到**极化功转化为热量上。

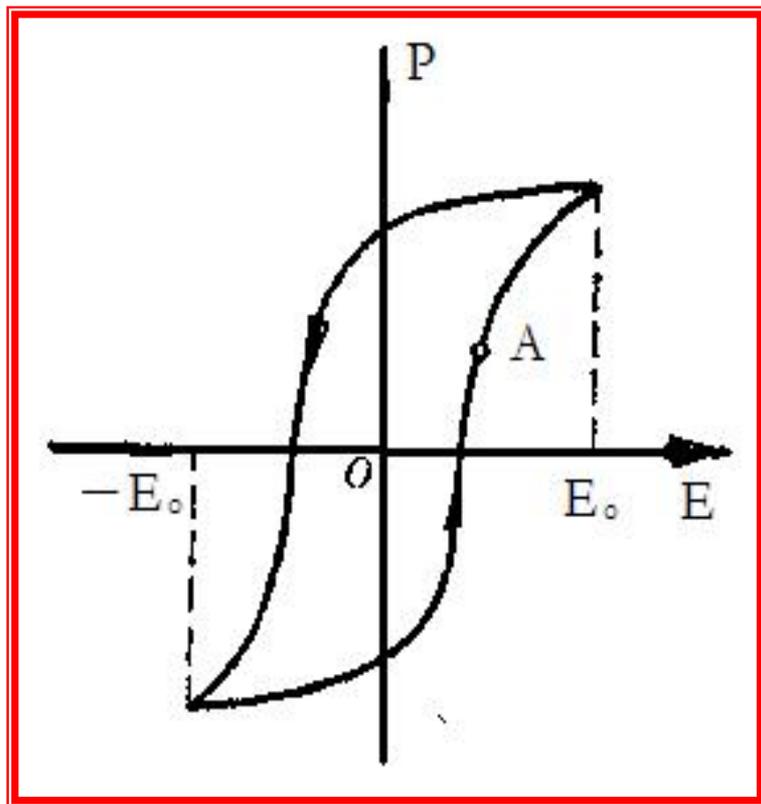
■ 例如**铁电体**就属于这种情况。铁电体的 P 和 E 的关系不仅是**非线性的**，而且是**非单值的**，一定的 E 所对应的 P 值**依赖于极化过程**。

极化过程是不可逆过程。

当从某点**A**出发**沿着电滞回线**循环一周回到**A**点时，**电源对单位体积铁电体所作的功**可

由式 (3.5.4) 求得：

$$\begin{aligned}
 a' &= \oint da' = \oint d\left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\right) + \oint EdP \\
 &= \oint EdP. \qquad (3.5.8)
 \end{aligned}$$



$$a' = \oint da' = \oint EdP. \quad (3.5.8)$$

式中右边沿电滞回线的闭路积分正好等于电滞回线所围的“面积”。这部分功既不改变电场 \mathbf{E} ，又不改变介质的极化状态 \mathbf{P} ，而是转化为热量，使介质发热。这部分因电滞现象而消耗的能量，称为电滞损耗。

* § 3.6 利用静电能求静电力

- 利用静电能可求得静电场中的静电力。
- N 个带电导体组成的带电系统，设想某一个导体在其他导体的作用下，受到静电力 F ，位移 δr ，则静电力 F 所作的功为：

$$\delta A = F \cdot \delta r = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (3.6.1)$$

- 分两种情形讨论：
 - (1) 带电体的电量不变，即不接电源，为孤立系统；
 - (2) 带电体的电势不变，接电源。

(1) 孤立系统，带电体的电量不变

- 位移 δr 只改变各导体的电势，使系统的静电能发生变化，
- 由能量守恒：即静电力所作的功等于系统静电能的减少，
$$\delta A = -(\delta W_e)_Q$$
$$\therefore (\delta W_e)_Q = -\delta A \quad (3.6.2)$$

将(3.6.1)代入上式： $(\delta W_e)_Q = -(F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z)$

- 由数学知：

$$\therefore F_x = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_Q \quad \text{或} \quad \mathbf{F} = -(\nabla W_e)_Q \quad (3.6.3)$$

(2) 接电源，带电体的电势不变

- 系统不是孤立的，外界（电源）通过给系统的导体提供电荷而做功 $\delta A'$ ，由能量守恒定律知系统静电能的变化为：

$$\delta W_e = -\delta A + \delta A' \quad (3.6.4)$$

- 电源使各导体的电势 U_i 保持恒定，设当导体位移 δr 时，各导体的电量会在电源的作用下变化 δQ_i ，则电源对系统做功为：

$$\delta A' = \sum_{i=1}^N U_i \delta Q_i \quad (3.6.5)$$

- 又系统静电能变化，由前静电能公式可得：

$$(\delta W_e)_U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N U_i \delta Q_i \quad (3.6.6)$$

■ 比较上两式，得外接电源做功是静电能变化的两倍：

$$\delta A' = 2(\delta W_e)_U \quad (3.6.7)$$

■ 代入式 (3.6.4) 右边，并将该式左边的 δW_e 代之以 $(\delta W_e)_U$ 便得： $(\delta W_e)_U = \delta A$ (3.6.8)

它表示当维持各导体的电势不变时，静电力做功等于系统静电能的增加。

■ 按 (1) 中推导，于是得：

$$\therefore F_x = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x} \right)_U \quad \text{或} \quad \mathbf{F} = (\nabla W_e)_U \quad (3.6.9)$$

■ **说明：** 所有由静电能求静电力的表达式，包括已经得到的式 (3.6.3) 和式 (3.6.9)，是彼此等效的，即对同一个静电力计算问题会给出同一答案。

原因很简单，对任何给定的带电系统，其中某个带电导体所受的静电力是由当时系统的电荷分布状态通过库仑定律唯一决定的，它与系统状态以后的变化无关。因此，就可以随意设想一种系统状态的变化，只要便于计算。

同理可推得静电力矩公式

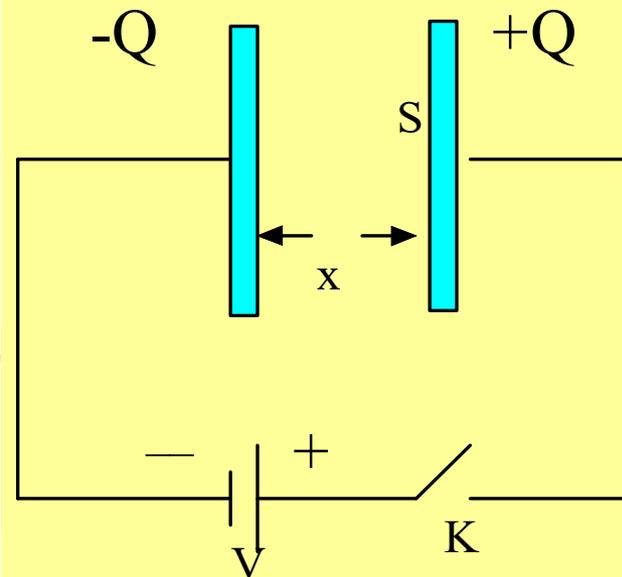
- 只要将位移 δr 换成角位移 $\delta\theta$ ，静电力做功：

$$\delta A = L_{\theta} \cdot \delta\theta$$

- L_{θ} 为静电力矩

$$L_{\theta} = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial\theta}\right)_Q, \quad L_{\theta} = \left(\frac{\partial W_e}{\partial\theta}\right)_U$$

[例3.6]真空平行板电容器，极板面积为 S ，相距为 x ，充电至电压 $U=V$ ，求带正电极板所受的力。



[解]电容器的
静电能:

$$W_e = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}Q^2 = \frac{CU^2}{2}$$

若**K断开**， Q 不变:

$$F_x = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_Q = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{2C}\right)\right]_Q = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

若**K闭合**， U 不变:

$$F_x = \left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_U = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{CU^2}{2}\right)\right]_U = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

用 $F=QE$ 同样可得

两式的计算结果相同，
将 $C=\epsilon_0 S/x$ 代入，负号
表示两极板的引力:

$$F_x = -\frac{\epsilon_0 S V^2}{2x^2} = -\frac{S D^2}{2\epsilon_0} = -\frac{S \sigma_{e0}^2}{2\epsilon_0}$$

[例3.7] 平行板电容器极板面积为 S ，极板间距为 d ，其间充满介电常数为 ϵ 的介质，求将介质从极板间完全取出时外力所作的功：(1) U 不变；(2) Q 不变。

[解]用 x 表示介质从极板间移出的距离

- $X=0$ 时， $C_1=\epsilon S/d$ ，介质充满；
- $X=l$ 时， $C_2=\epsilon_0 S/d$ ，介质全部抽出。

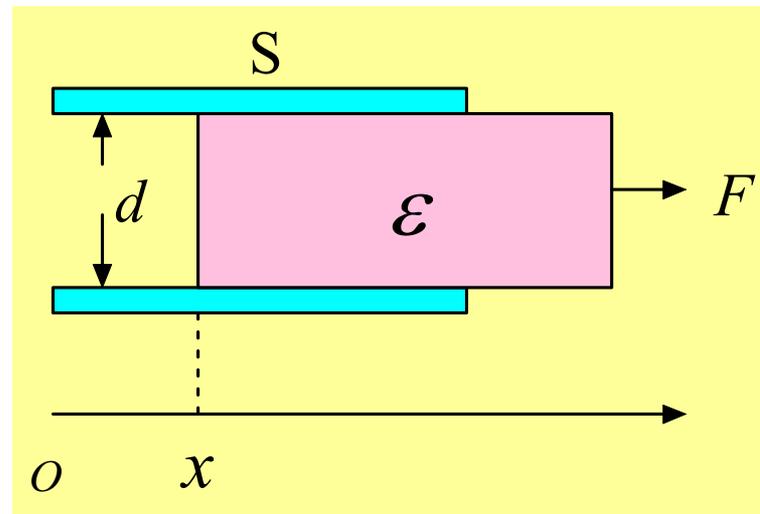
(1) U 不变时，

静电力：
$$F_x = \left(-\frac{\partial W_e}{\partial x} \right)_U = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}$$

外力做功：

$$A_1' = \int F' dx = \int F dx = - \int_{C_1}^{C_2} \frac{U^2}{2} dC = \frac{1}{2} U^2 (C_1 - C_2) = \frac{(\epsilon - \epsilon_0) S}{2d} U^2$$

外力反抗静电力



(2) **Q不变时**，静电力： $F_x = -\left(\frac{\partial W_e}{\partial x}\right)_Q = \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial x}$
 外力做功：

$$A_2' = -\int F dx = -\int_{C_1}^{C_2} \frac{Q^2}{2C^2} dC = \frac{(C_1 - C_2)Q^2}{2C_1 C_2} = \frac{(\varepsilon - \varepsilon_0)d}{2\varepsilon\varepsilon_0 S} (C_1 U)^2 = \frac{\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon_0)S}{2\varepsilon_0 d} U^2 \neq A_1'$$

说明： 这是两种不同的真实物理过程

(1) **U不变**，接电源。外力作正功，**电容器电能却减少**。

$$\text{即 } \Delta W_{e1} = \frac{1}{2} U^2 (C_2 - C_1) = -A_1' < 0$$

因抽出电介质时，电容减小，极板电量变小，**对电源充电**。
 外力做功和电容器减少的静电能全部转化为电源的储能。

(2) **Q不变**，孤立系。外力做功等于**电容器电能的增加**。

$$\text{即 } \Delta W_{e2} = \frac{1}{2} Q^2 \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right) = A_2' > 0$$

[例3.8]平行板电容器极板面积为 S ，极板间距为 d ，插入介电常数为 ϵ 、密度为 ρ 的液体介质中，维持电容器的电压 U 不变，求液面在电容器中上升的高度 h 。

[解]这是静电力与重力平衡的问题，设极板高为 $b=b_1+b_2$ ，宽为 a ， $S=ab$ ， b_1 为电容器中液柱高， b_2 为电容器中空气柱高

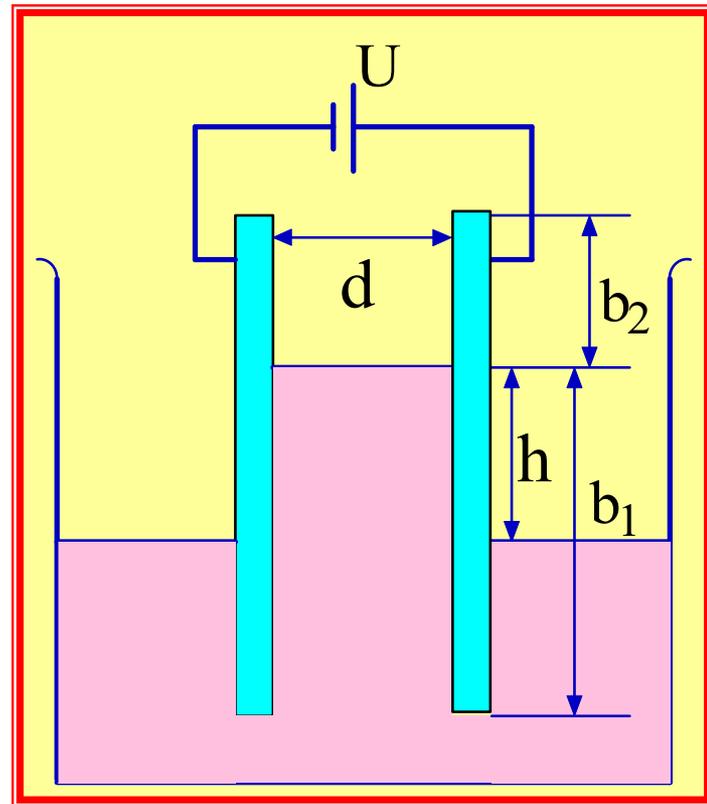
$$C = \frac{(b_1\epsilon + b_2\epsilon_0)a}{d} = \frac{[b\epsilon_0 + b_1(\epsilon - \epsilon_0)]a}{d}$$

$$F = \left(\frac{\partial W_e}{\partial b_1}\right)_U = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial b_1} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)aU^2}{2d}$$

平衡时， $F=mg$ ， g 为重力加速度

$m = dah\rho$ ，因此

$$h = \frac{m}{da\rho} = \frac{F}{ad\rho g} = \frac{(\epsilon - \epsilon_0)U^2}{2d^2\rho g}$$

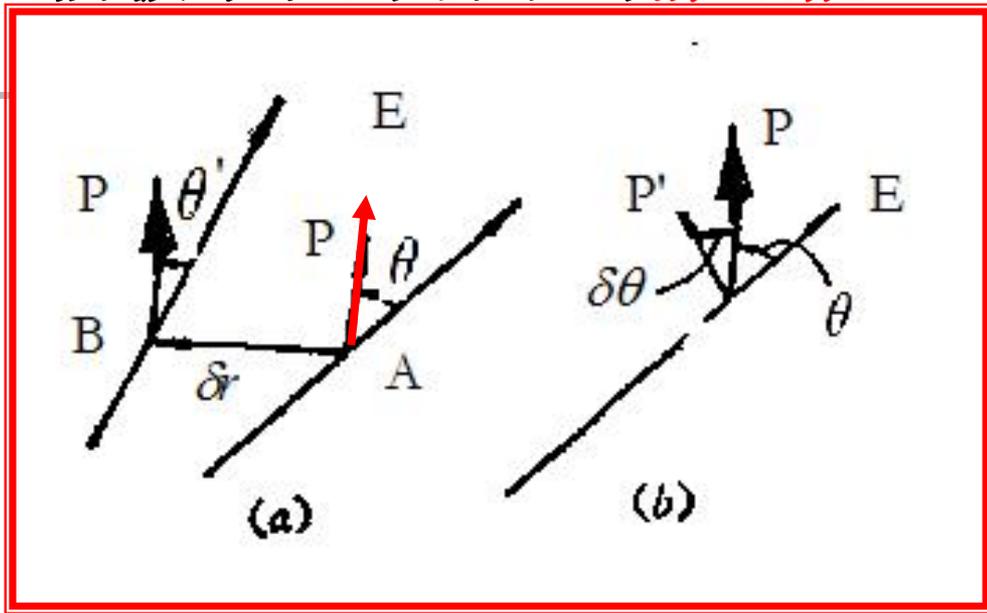


[例3.9]求在电场 $E(\mathbf{r})$ 中，电偶极子 p 所受的力和力矩。

[解]式(3.3.6)给出了电偶极子在外场中的静电能：

$$W_{\text{互}} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \theta,$$

设电偶极子作一平移，由A点移到B点（右图(a)）。由于是平移（即平行移动）， p 的方向应保持不变。另外，电荷分布不变，即 p 的大小也应保持不变。于是，静电力为：



电偶极子在外电场中的平移和旋转

$$\mathbf{F} = -(\nabla W_{\text{互}})_{\mathbf{p}} = [\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})]_{\mathbf{p}},$$

根据矢量微分公式： $[\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})]_p = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E} + \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E})$ ，

考虑到 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ ，有 $\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}$ 。与例2-2结果一致。

■在偶极子平移过程中，由于 \mathbf{E} 的方向随空间变化， θ 也会发生相应变化，一般会有 $\theta' \neq \theta$ 。基于上述分析，**当直接计算时**，应将上式中的 $\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ 代以 $pE \cos \theta$ ， $\cos \theta$ 不能从梯度运算符号中提出，应为：

$$\mathbf{F} = [\nabla(pE \cos \theta)]_p = p(\cos \theta \nabla E - E \sin \theta \nabla \theta).$$

■下面**求电偶极子所受的力矩**。为此，设电偶极子作一角位移 $\delta\theta$ ，如前页图(b)所示。此时 p 的**大小不变**，但**方向**会发生**变化**。于是得：

$$L_{\theta} = -\left(\frac{\partial W_{\text{互}}}{\partial \theta}\right)_p = \frac{\partial}{\partial \theta}(pE \cos \theta) = -pE \sin \theta.$$

注意电偶极子的位置并未挪动，故 **E** 被当作“常数”从微分号下提出。上式表明， **L_{θ}** 为负值，**以 **E** 方向为基准**，角 **θ** 减小的方向应是 **L_{θ}** 的方向，写成矢量形式有：

$$\mathbf{L}_{\theta} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

此结果也与第二章的例**2.2**的结果一致。